ISSN 2079–1836
2012, вип. 20

УДК 539.3

А. Г. Николаев, д-р физ.-мат. наук, Е. М. Орлов

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Получено решение с помощью обобщенного метода Фурье первой термоупругой краевой задач для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. Рассмотрена задача для случая свободных границ с постоянными температурами. Проведены численный анализ распределения напряжений на поверхности полости и качественный анализ напряжений в зависимости от геометрических параметров.

Ключевые слова: *обобщенный метод Фурье, термоупругость, полупространство, сфероидальная полость, трансверсальная изотропия.*

Введение. Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) в пространственных канонических телах с усложненными физико-механическими свойствами, в частности, с трансверсальной изотропией материала тела необходимо при создании моделей пористых и композиционных материалов, а также в расчетах на прочность при конструировании изделий из этих материалов. В большинстве опубликованных работ по этой проблеме использован метод конечных элементов [7, 8]. Одним из основных аналитических методов решения краевых задач для трансверсально-изотропных канонических тел является метод разделения переменных, который применялся в [4 – 6]. В [5] была предпринята попытка методом Фурье построить точные решения уравнений равновесия термоупругого трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью. Однако ввиду того, что построенная вектор-функция не является регулярной в рассматриваемой области, она не может считаться решением. Распределения напряжений в трансверсально-изотропном многосвязном каноническом теле без учета температурного поля исследовались в [1], в которой использовался обобщенный метод Фурье (ОМФ). В [2] при помощи ОМФ построены общие точные решения основных осесимметричных краевых задач теории термоупругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной неоднородностью и температурного поля в виде потенциала. Полученные результаты использованы при решении осесимметричной краевой задачи термоупругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью при условии свободных границ.

В настоящей статье ОМФ применен к решению термоупругой краевой задачи для трансверсально изотропного полупространства со сфероидальной неоднородностью и температурного поля общего вида. Рассмотрена задача для случая свободных границ с постоянными температурами. Проведен численный анализ распределения напряжений на поверхности и в

© А. Г. Николаев, Е. М. Орлов, 2012

экваториальной плоскости сфероидальной полости. Приведен качественный анализ напряжений в зависимости от геометрических параметров.

Постановка задачи. Рассмотрим первую осесимметричную краевую задачу теормоупругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной неоднородностью. Предполагается, что трансверсально-изотропное полупространство, имеющее внутреннюю сфероидальную границу, занимает область Ω, с центром неоднородности совмещено начало декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3), а оси Ox_3, анизотропии и симметрии рассматриваемого тела совпадают. Исследуемая краевая задача в силу стационарности распадается на задачу теплопроводности (1) – (3) и задачу термоупругости (4) – (6), т. е. задачу решения неоднородной системы уравнений равновесия в перемещениях трансверсально-изотропной среды:

$$k_{ii} T_{,ii} = 0, \quad i = 1,2,3; \tag{1}$$

$$T_{|\Gamma_1} = \int_0^\infty B_4(\lambda) J_0(\lambda\rho) d\lambda; \tag{2}$$

$$T_{|\Gamma_2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(4)} P_n(\cos\eta); \tag{3}$$

$$c_{ii} u_{i,ii} + \sum_{j\neq i} b_{ij} u_{i,ji} + \sum_{j\neq i} a_{ij} u_{i,jj} = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} \alpha_k T_{,i}, \quad i,j = 1,2,3; \tag{4}$$

$$\mathrm{F}_{|\Gamma_1} = c_{44} \int_0^\infty \left[\lambda B_1(\lambda) J_1(\lambda\rho) \mathrm{e}_\rho + \lambda B_0(\lambda) J_0(\lambda\rho) \mathrm{e}_z \right] \lambda d\lambda; \tag{5}$$

$$\mathrm{F}_{|\Gamma_2} = \frac{c_{44}}{\sqrt{d_1^2 \sin^2\eta + d_2^2 \cos^2\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_n^{(1)} P_n^{(1)}(\cos\eta) \mathrm{e}_\rho + b_n^{(0)} P_n(\cos\eta) \mathrm{e}_z \right], \tag{6}$$

где k_{ii} – коэффициенты теплопроводности $(k_{11} = k_{22})$; α_k – коэффициенты линейного теплового расширения; $b_n^{(j)}$, $B_j(\lambda)$ – заданные коэффициенты и функции; $c_{ij} = E_{iijj}$ при $i,j = 1,2,3$; $c_{44} = E_{1313} = E_{2323}$; $\frac{c_{11} \cdot c_{12}}{2} = E_{1212}$; $a_{ij} = E_{ijij}$ и $b_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$ при $i \neq j$; E_{ijkl} – элементы тензора упругих постоянных; Γ_1, Γ_2 – границы полупространства и сфероида; ρ, z и e_ρ, e_z – соответственно координаты и орты цилиндрической системы координат, совмещенной с декартовой; $P_n^m(x)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода.

Уравнения $z=-h$ и $\left(\rho/d_2\right)^2+\left(z/d_1\right)^2=1$ задают границы полупространства и полости соответственно.

Построение общего решения. Вводятся три вытянутые сфероидальные (сжатые сфероидальные, сферические) системы координат $\left(\xi_j,\eta_j,\varphi\right)$ $\left(j=1,2,4\right)$, координаты которых связаны с цилиндрическими координатами такими соотношениями:

$$\begin{cases} \rho=c_j\cdot sh\xi_j\cdot\sin\eta_j, & \eta_j\in[0;\pi]; \\ z=\sqrt{\nu_j}\cdot c_j\cdot ch\xi_j\cdot\cos\eta_j, & \xi_j\in[0;\infty), \end{cases}$$

где $c_j>0$ – параметры сфероидальных систем координат; $\nu_4=k_{33}/k_{11}$; ν_1, ν_2 – два разных положительных корня уравнения

$$c_{44}c_{11}\nu^2+\left(c_{13}^2+2c_{13}c_{44}-c_{11}c_{33}\right)\nu+c_{33}c_{44}=0.$$

Уравнения поверхности сфероидальной полости запишутся в виде $\xi_j=\xi_{j0}$. На граничной поверхности должны выполнятся такие соотношения:

$$c_1\cdot sh\xi_{10}=c_2\cdot sh\xi_{20}=c_4\cdot sh\xi_{40};$$
$$\sqrt{\nu_1}c_1\cdot ch\xi_{10}=\sqrt{\nu_2}c_2\cdot ch\xi_{20}=\sqrt{\nu_4}c_4\cdot ch\xi_{40},$$

тогда $\cos\eta_j=\dfrac{z}{\sqrt{\nu_j}c_j\cdot ch\xi_{j0}}$ на поверхности сфероида не зависит от j.

Решение задачи теплопроводности будем искать в виде

$$T=\int_0^\infty A_4(\lambda)e^{-\lambda\frac{z}{\sqrt{\nu_4}}}J_0(\lambda\rho)d\lambda+\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(4)}\frac{Q_n\left(ch\xi_4\right)}{Q_n\left(ch\xi_{40}\right)}P_n\left(\cos\eta_4\right),$$

а вектор перемещений – в виде

$$\mathrm{U}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^{(j)}}{Q_n^{(1)}\left(q_{j,0}\right)}\mathrm{U}_{j,n,0}^{+}\left(\xi_j,\eta_j\right)+\sum_{j=1}^{2}\int_0^\infty A_j(\lambda)\mathrm{V}_{j,0}^{-}\left(\rho,z_j,\lambda\right)+\sum_{i=1}^{2}\nabla_i\psi_i,$$

где $a_n^{(j)}$, $A_j(\lambda)$ – неизвестные коэффициенты и плотности; $z=\sqrt{\nu_j}z_j$;

$$\mathrm{V}_{j,0}^{\pm}\left(\rho,z_j,\lambda\right)=-\sum_{t=o}^{1}\left(\mp\frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}}\right)^{1-t}v_j^{\pm(t)}\mathrm{e}_{\rho_{2-t}};\quad \mathrm{U}_{j,n,0}^{\pm}=-\sum_{t=o}^{1}\left(\frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}}\right)^{1-t}u_{j,n}^{\pm(t)}\mathrm{e}_{\rho_{2-t}};\quad \begin{cases}\mathrm{e}_{\rho_1}=\mathrm{e}_\rho\\ \mathrm{e}_{\rho_2}=\mathrm{e}_z\end{cases};$$

$v_j^{\pm(t)} = e^{\pm\lambda\frac{z}{\sqrt{\nu_j}}} J_t(\lambda\rho)$; $k_j = \dfrac{b_{31}\nu_j}{\left(a_{33} - a_{31}\nu_j\right)}$; $u_{j,n}^{\pm(t)} = \begin{Bmatrix} Q_n^{-t}(q_j) \\ P_n^{-t}(q_j) \end{Bmatrix} P_n^t(p_j) = (-1)^t \begin{Bmatrix} Q_n^t(q_j) \\ P_n^t(q_j) \end{Bmatrix} P_n^{-t}(p_j)$;

$q_j = ch\left(\xi_j\right)$; $p_j = \cos\left(\eta_j\right)$; $Q_n^m(x)$ – присоединенная функция Лежандра второго рода; $\sum_{i=1}^{2} \nabla_i \psi_i$ – частное решение неоднородного уравнения равновесия. Для его построения введены такие дифференциальные операторы

$$\nabla_i = \mathrm{e}_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{e}_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + k_i \mathrm{e}_{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3};$$

а функции ψ_i являются регулярным решением системы:

$$\left[\Delta_2 + \nu_i \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right] \psi_i = \gamma_i T; \quad i = 1,2, \tag{7}$$

$$\gamma_i = \frac{(-1)^i}{\dfrac{k_2}{\nu_2} - \dfrac{k_1}{\nu_1}} \cdot \frac{\beta_3 - k_{3-i}\nu_i\beta_1}{\nu_{3-i}\left[c_{44}(1+k_i) + c_{13}k_i\right]}; \quad \beta_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik}\alpha_k. \tag{8}$$

В этом можно убедиться, если использовать следующие теоремы сложения:

$$v_j^{-(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) i_n\left(\lambda c_j\right) u_{j,n}^{-(t)}; \tag{9}$$

$$u_{j,n}^{+(t)} = (\pm 1)^{n+t} c_j \int_0^{\infty} v_j^{\mp(t)} i_n\left(\lambda c_j\right) d\lambda, \quad z_{j<-c_j}^{>c_j}, \tag{10}$$

где $i_n(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x)$; $I_n(x)$ – присоединенная функция Бесселя, а также соотношения:

$$u_{4,n}^{+} = \frac{c_4\nu_4}{2n+1} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1}{2n-1}\left(u_{4,n-2}^{+} - u_{4,n}^{+}\right) - \frac{1}{2n+3}\left(u_{4,n}^{+} - u_{4,n+2}^{+}\right)\right];$$

$$u_{4,n}^{+} = \sqrt{\pi}\left(\frac{c_4}{2}\right)^{n+1} \frac{n!}{\Gamma\left(n+\dfrac{3}{2}\right)} \cdot \frac{1}{r_4^{n+1}} P_n\left(\cos\theta_4\right) - \sum_{k=n+2}^{\infty} \tilde{g}_n^k u_{4,k}^{+},$$

где

$$\tilde{g}_n^k = (-1)^k \varepsilon_{k,n} \frac{n!}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{n}{2}+1\right)};$$

$$\varepsilon_{k,n} = \begin{cases} 1, & k-n=2m; \\ 0, & k-n=2m+1 \end{cases}; \quad m \in Z;$$

$$r_4 \cos\theta = c_4 ch\xi_4 \cos\eta_4; \qquad r_4 \sin\theta = c_4 sh\xi_4 \sin\eta_4.$$

При помощи теорем сложения (9), (10) можно полностью представить решение либо в сфероидальных, либо в цилиндрических координатах. Таким образом, удовлетворяя граничным условиям и пользуясь ортогональностью и полнотой функций Лежандра, а также обратным преобразованием Ханкеля, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $a_n^{(j)}$, фредгольмовость оператора которой исследована в [3].

Задача термоупругости для трансверсально-изотропном полупространстве со сфероидальной полостью для случая свободных границ с постоянными температурами на них. Для случая свободных граничных условий с постоянными температурами на них необходимо выбрать условия (2), (3), (5), (6) такими:

$$T_{|\Gamma_1} = 0; \quad T_{|\Gamma_2} = T_0; \quad \mathrm{F}_{|\Gamma_1} = 0; \quad \mathrm{F}_{|\Gamma_2} = 0.$$

На рис. 1 приведены графики напряжений для постоянного соотношения полуосей вытянутого сфероида $d_1/d_2 = 2$ и для переменного соотношения расстояния от начала координат до границы полупространства к большой полуоси сфероида, а именно, для таких соотношений $h/d_1 = 1{,}1; 1{,}25; 1{,}5; 4$ графики пронумерованы в том же порядке. На рис. 2 приведены графики напряжений для постоянного соотношения расстояния от начала координат до границы полупространства к большой полуоси сфероида $h/d_1 = 3/2$ и для переменного соотношения полуосей вытянутого сфероида, а именно, для таких соотношений $d_1/d_2 = 4; 2; 1{,}5; 1{,}2$, графики пронумерованы в том же порядке.

Выводы. Таким образом, на основе обобщенного метода Фурье получено решение первой термоупругой краевой задач для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. Рассмотрена задача для случая свободных границ с постоянными температурами. Проведены численный анализ распределения напряжений на поверхности полости и качественный анализ напряжений в зависимости от геометрических параметров.

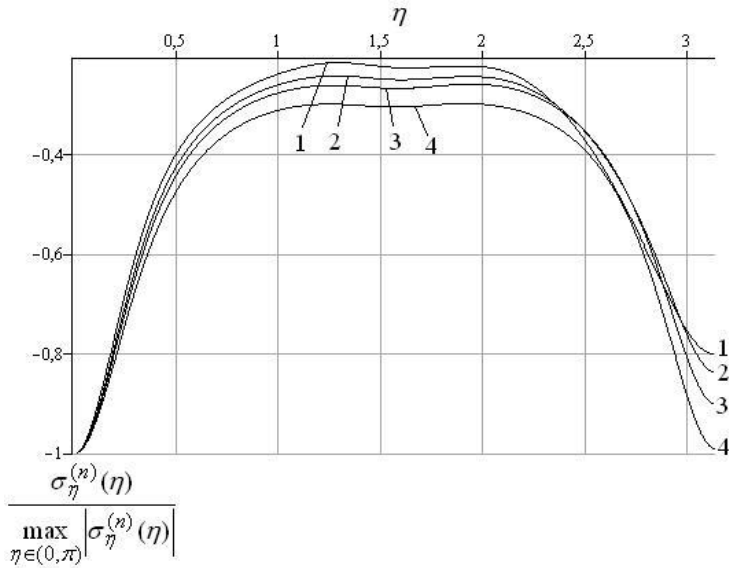

Рис. 1 – **Напряжения на поверхности полости при фиксированных d_1, d_2 и переменном h**

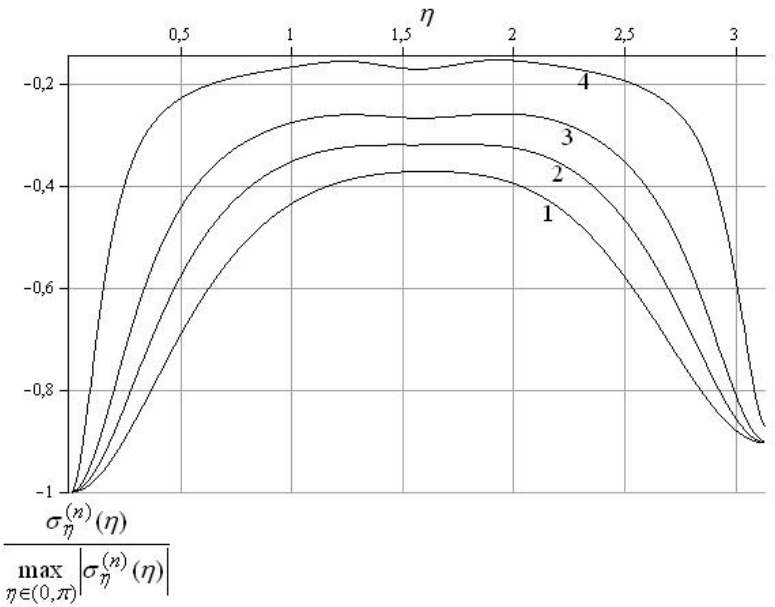

Рис. 2 – **Напряжения на поверхности полости при фиксированных d_1, h и переменном d_2**

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Николаев А. Г.*** Круговая трещина в трансверсально-изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 9–14.
2. ***Николаев А. Г.*** Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для специально прогретого трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью / А. Г. Николаев, Е. М. Орлов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2011. – Вып. 4 (68). – С. 78–85.
3. ***Николаев А. Г.*** Некоторые осесимметричные задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью / А. Г. Николаев, Е. М. Орлов, И. А. Юхно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2007. – Вып. 1 (48). – С. 42–49.
4. ***Подильчук Ю. Н.*** Пространственные задачи теории упругости и пластичности / Ю. Н. Подильчук // Граничные задачи статики упругого тела. – К. : Наук. думка, 1984. – Т. 1. – С. 303.
5. ***Подильчук Ю. Н.*** Термоупругая деформация трансверсально-изотропного вытянутого сфероида / Ю. Н. Подильчук // Прикладная механика. – 1987. – 23, № 12. – С. 25–34.
6. ***Ding H. J.*** Analytical thermoelastodynamic solutions for a nonhomogeneous transversely isotropic hollow sphere / H. J. Ding, H. M. Wang, W. W. Chen // Appl. Mech. – 2002. – 72, № 8. – P. 545–553.
7. ***Haktan Karadeniz Z.*** A numerical study on the coefficients of thermal expansion of fiber reinforced composite materials / Z. Haktan Karadeniz and Dilek Kumlutas // Composite Structures. – Vol. 78, Issue 1. – 2007. – P. 1–10.
8. ***Nao-Aki Noda.*** Two-dimensional and axisymmetric unit cell models in the analysis of composite materials / Nao-Aki Noda, Yasushi Takase, Yasu-Aki Shukuwa // Composite Structures. – Vol. 79, Issue 2. – 2007. – P. 163–173.

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина

Поступила в редколлегию 20.03.2012

О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, Є. М. Орлов

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРШОЇ ВІСЕСИМЕТРИЧНОЇ ТЕРМОПРУЖНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ ЗІ СФЕРОЇДАЛЬНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Отримано розв'язок першої термопружної вісесиметричної крайової задачі за допомогою узагальненого метода Фур'є для трансверсально-ізотропного півпростору зі сфероїдальною порожниною. Розглянута задача для випадку вільних границь зі сталою температурою. Проведені чисельний аналіз розподілення напружень на поверхні порожнини та якісний аналіз напружень в залежності від геометричних параметрів.

Ключові слова: *узагальнений метод Фур'є, термопружність, півпростір, сфероїдальна порожнина, трансверсальна ізотропія.*

A. G. Nikolaev, Professor, Y. M. Orlov

A SOLUTION OF FIRST AXISYMMETRIC BOUNDARY PROBLEMS OF THERMOELASTICITY FOR THE TRANSVERSELY-ISOTROPIC HALF SPACE WITH SPHEROIDAL CAVITY

A solution of first axisymmetric boundary problems of thermoelasticity for the transversely-isotropic half space with spheroidal cavity is obtained by generalized Fourier's method. A problem for free boundaries is analyzed. The numerical analysis of stresses in equatorial plane and on the surface of cavity is obtained.

Keywords: *generalized Fourier's method, thermoelasticity, half space, spheroidal cavity, transversely-isotropic.*